

# „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“

## Einleitung


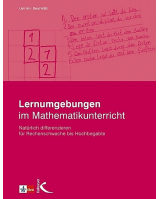
**Der Begriff der „Lernumgebung“** wird im Schulkontext unterschiedlich gebraucht. Meistens ist damit eine didaktische Lernform gemeint. Für den Mathematikunterricht wurde dieser Begriff im Projekt „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte“ (Elmar Hengartner, Ueli Hirt, Beat Wältli u.a. 2000-2010) verwendet. Der Begriff „mathematischen Lernumgebung“ bezeichnet einerseits eine bestimmte fachliche Aufgabenart und andererseits ein Lernarrangements zum forschenden und kooperativen Lernen. Die Projektanlage entwickelte sich auf der Grundlage der mathematikdidaktischen Leitideen des aktiv-entdeckenden und sozial-dialogischen Lernens sowie des produktiven Übens und der natürlichen Differenzierung aus dem Projekt „mathe2000“. Auf den nachfolgenden Seiten wird der **Begriff der „mathematischen Lernumgebung“** als fachlich reichhaltige Aufgabe definiert und mit **Gütekriterien** genauer beschrieben.

Bedeutsam ist **die Art und Weise der Umsetzung von Lernumgebungen im Mathematikunterricht**, welche von den Lehrpersonen bestimmte Haltungen und Unterrichtsfähigkeiten im Sinne der oben genannten mathematikdidaktischen Leitideen zur Einrichtung, Strukturierung und Moderation von Lernumgebungen erfordert. Die Umsetzung ist anspruchsvoll jedoch für einen gewinnbringenden Mathematikunterricht mit mathematischen Lernumgebungen unabdingbar. Ebenso erfordert ein erfolgreicher Unterricht mit mathematischen Lernumgebungen auch personale, soziale und methodische Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler im Umgang mit fachlich reichhaltigen Aufgaben in einem forschungsorientierten offenen Mathematikunterricht. Einerseits müssen für eine erfolgreiche Umsetzung sowohl von Lehrenden wie von Lernenden methodische Kompetenzen aufgebaut werden. Andererseits wird mit mathematischen Lernumgebungen ein produktives, kompetenzorientiertes und nachhaltiges Lernen und Üben sowie eine sinnvolle Binnendifferenzierung und Förderung für alle möglich. Nachfolgend sind deshalb auch **Hinweise zur Inszenierung von Lernumgebungen** aufgeführt.

Die fachlichen Kernideen zu mathematischen Lernumgebungen als fachlich **reichhaltige Aufgaben** sind in allen **Mathematiklehrmitteln** vorhanden. In Mathematiklehrmitteln ist die fachliche Reichhaltigkeit der Aufgabenideen jeweils mehr oder weniger in einzelne Aufgaben aufgegliedert. Ebenso wird die Reichhaltigkeit von Aufgaben in klassenorientierten Lehrmitteln bewusst eingeschränkt und im Sinne der Spiralkonzeption in einzelne Kompetenzstufen oder verschiedene Handlungsaspekte aufgeteilt.

**Mathematische Lernumgebungen als Aufgaben zum kooperativen Lernen** fassen mehrere Aufgaben in Mathematiklehrmitteln zur gleichen fachlichen Aufgabenidee zusammen und können so das Übungsangebot in einem Mathematiklehrmittel fokussieren. Das wichtige individuelle Üben von mathematischen Basiskompetenzen wird durch gemeinsames forschendes Lernen ergänzt. Oft gelingen auch Einsichten in fachliche und überfachliche Zusammenhänge im kooperativen Lernen mit Lernumgebungen besser als in lehrerzentriertem Erklärungsunterricht. Durch einen gut strukturierten und gezielt geleitetem Mathematikunterricht mit Phasen der Einzelarbeit und sozialem Austausch wird das Verständnis von mathematischen Kernideen auf dem für die Lernenden jeweils passenden fachlichen Niveau ermöglicht und vertieft.

**Die beiden Buchbände** „Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte“ (Hengartner/Hirt/Wälti; Klettverlag 2006/2010) und „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“ (Hirt/Wälti; Kallmeyer-Klettverlag 2008) sind also nicht eigentliche Lehrmittel, sondern nehmen Aufgabenideen aus Mathematiklehrmitteln auf und verdichten einzelne Übungen zu reichhaltigen Aufgabenanlagen. Deshalb können einerseits Aufgabenangebote in Mathematiklehrmitteln oft didaktisch als mathematische Lernumgebungen inszeniert werden. Andererseits können Aufgabenangebote in Mathematiklehrmitteln mit den Teilaufgaben einer mathematischen Lernumgebung auch ergänzt oder ersetzt werden. In den beiden Buchbänden sind neben einführenden Grundlagentexten, den reichhaltigen Aufgaben, Sachanalysen (Worum geht es?) und didaktischen Hinweisen zur Inszenierung von Lernumgebungen (Wie kann man vorgehen?) vor allem auch Schülerdokumente abgebildet, welche die Leistungsbreite von Arbeitsprodukten und die mathematischen Handlungsaspekte im Lehrplan 21 sichtbar machen. Welche Lernumgebungen zu welchen Themen im Mathematiklehrmittel „Schweizer Zahlenbuch“ passen, kann neben anderen Informationen den Planungshilfen auf [www.zahlenbu.ch](http://www.zahlenbu.ch) entnommen werden: [www.zahlenbu.ch/cms/index.php?page=105](http://www.zahlenbu.ch/cms/index.php?page=105)

	<p>„Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte“ Elmar Hengartner, Ueli Hirt, Beat Wälti; Klettverlag 2006/2010</p>
	<p>„Lernumgebungen im Mathematikunterricht“ Ueli Hirt, Beat Wälti; Kallmeyer-Klettverlag 2008</p>

# „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“

## Begriffsklärung

- Mathematische Lernumgebungen sind offene und reichhaltige Aufgabenideen mit verschiedenen Teilaufgaben im Sinne von „Rampen“, die ein Lernen auf verschiedenen Niveaus anregen.
- Mathematische Lernumgebungen bestehen nicht aus verschiedenen Aufgaben oder Lernformen, sondern aus einer Aufgabenidee mit einfacheren Teilaufgaben und anspruchsvolleren Teilaufgaben innerhalb der gleichen mathematischen Aufgabenanlage und Grundidee (fachlicher Rahmen).
- Mathematische Lernumgebungen regen zum eigentätigen „Mathematik-Treiben“ an, lösen Fachgespräche aus und machen so verschiedene mathematische Kompetenzen (Handlungsaspekte) innerhalb der gleichen Aufgabenanlage sichtbar.
- In mathematischen Lernumgebungen können langsam und schnell Lernende innerhalb des gleichen fachlichen Rahmens integriert gefördert werden, voneinander und miteinander lernen und den individuell passenden Schwierigkeitsgrad selber wählen („natürliche Differenzierung“ vom lernenden Kind aus).
- Das Konzept der Lernumgebungen basiert auf einer konstruktivistischen Grundposition und auf einer Anerkennungskultur.

## Konstruktivistische Grundposition

- Lernen ist ein aktives individuelles Konstruieren von Sinn und Verständnis
  - Unterrichtsrahmen und Lernorganisation mit Möglichkeiten zu aktiv-entdeckendem, sozial-dialogischem und selbstgesteuertem Lernen
- Rolle der Lehrperson:
- effizientes Moderieren und Begleiten (Hilfe zur Selbsthilfe)
  - angemessenes ergänzendes Informieren, Instruieren
  - Balance von Invention und Konvention (Gleichgewicht zwischen informativem Lernen und eigenverantwortlich organisiertem Lernen)

## Anerkennungskultur

- Positiv wertende und kompetenzorientierte Wahrnehmung von Beiträgen der Kinder (Potenzial- und Stärkenorientierung im Gegensatz zur Defizitorientierung)
- Würdigung von Teilleistungen (Gegensatz: Perfektionismus)
- diagnostizieren, wert- und ein-schätzen, fördern von Kompetenzen

Literatur „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“ (Hirt/Wälti; Klettverlag 2008; S.12/13)

# „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“

## Gütekriterien für substantielle mathematische Lernumgebungen:

- Mathematische Reichhaltigkeit mit sichtbar werdenden mathematischen Strukturen, Mustern, Regel- und Gesetzmässigkeiten (fachliche Rahmung mit Aufgabenanlagen zu Grundideen)
- Orientierung an zentralen Lehrplaninhalten und bedeutsamen mathematischen Kompetenzen
- Hohes Potential zu kognitiver Aktivierung und zum Sichtbarmachen von mathematischen Handlungskompetenzen (Handlungsaspekte)
- Potenzial zur Initiierung von Eigentätigkeiten aller Lernenden durch grundlegende Aufgabenidee und passend aufbauende bzw. kompetenzorientiert anspruchsvoller werdende Teilaufgaben
- Förderung von individuellen Denk- und Lernwegen
- Förderung von eigenen Darstellungsformen
- Förderung von sozialem Austausch und fachlicher Kommunikation
- Zugänglichkeit für alle Lernenden auf unterschiedlichen Niveaus:
  - Anknüpfungsmöglichkeit an Vorkenntnissen
  - Tätigkeitsmöglichkeit auf Elementarstufe
- Herausforderungen für schnell Lernende und für begabte Kinder mit entsprechenden Ansprüchen in den Teilaufgaben

→ keine Postenlauf-Werkstatt mit vielen kleinen Aufgaben

→ eher ein Atelier zu einer grossen Aufgabenidee

→ Kinder arbeiten verschieden am gleichen Thema

→ in Planarbeiten den sozialen Austausch organisieren

Literatur „Lernumgebungen im Mathematikunterricht“ (Hirt/Wälti; Klettverlag 2008; S.14)

# Inszenierung von mathematischen Lernumgebungen

## Lernumgebungen als fachdidaktische Lernform

Mathematische Lernumgebungen sind offene reichhaltige Aufgaben zu zentralen Kernideen der Mathematik. Die Substanz dieser Aufgaben ist primär fachlich begründet und ermöglicht aktiv-entdeckendes, forschendes, sozial-dialogisches und kooperatives Lernen für das gesamte Begabungsspektrum vom lernschwachen bis zum hochbegabten Schüler innerhalb der gleichen fachlichen Rahmenidee. Die Reichhaltigkeit von mathematischen Lernumgebungen ergibt sich nicht primär durch das Lernarrangement (wie ein Matheplan oder eine Werkstatt mit vielen verschiedenen Aufgaben), sondern durch Möglichkeiten zum Erforschen von mathematischen Mustern, Strukturen und Gesetzmässigkeiten innerhalb einer einzigen grossen Aufgabe. Dies geschieht mit Teilaufgaben zu einer Kernaufgabe, welche fachliche Anforderungen auf unterschiedlichen Niveaus bieten und eine natürliche Differenzierung vom Lernenden aus ermöglichen. In diesem Sinne sind mathematische Lernumgebungen keine erweiterte didaktische Lernform. Sie sind fachlich strukturiert und ermöglichen intensive Lernprozesse, in welchen gleichzeitig verschiedene fachliche Kompetenzen wie operieren, benennen, erforschen, argumentieren, mathematisieren und darstellen gefördert werden können. Ebenso ist die Förderung von fächerübergreifenden Selbst- und Sozialkompetenzen möglich. Wie andere Lernformen müssen auch mathematische Lernumgebungen von der Lehrperson sorgfältig eingeführt, begleitet und moderiert werden. Die Fähigkeiten zu aktiv-entdeckendem, forschenden und insbesondere zu sozial-dialogischen und kooperativem Lernen in einem offenen Mathematikunterricht sind nicht automatisch bei allen Lernenden vorhanden und müssen auch langfristig geübt und aufgebaut werden. Mathematische Lernumgebungen müssen deshalb „inszeniert“ und in Schritten moderiert werden. Gut inszenierte und strukturierte Lernumgebungen bieten dann in verschiedenen Kompetenzbereichen intensive Lernmöglichkeiten und eignen sich insbesondere auch für das altersdurchmischte Lernen (ganz im Sinne von Edwin Achermann: „Persönliches Lernen unter Verschiedenen am gleichen Gegenstand – zusammen verschieden am Gleichen sein - der Vielfalt Raum und Struktur geben“).

## Inszenierung von Lernumgebungen in 5 Schritten

Nachfolgend wird eine Inszenierung und Strukturierung von Lernumgebungen in 5 Schritten vorgeschlagen. Zentral ist eine sorgfältige fachliche und fachdidaktische Vorbereitung der Lernumgebung durch die Lehrperson, da sowohl für die Einführung wie für Begleitung und Beratung der Schülerinnen und Schüler in der Lernumgebung das fachliche Verständnis für die mathematische Kernidee bedeutend ist. Wichtig ist die Unterscheidung von Einführungs-, Forschungs- und Auswertungsphasen.

1. **ANSPIELEN (Einstiegsphase)**
  - Begriffe und Grundaufgabe vorstellen und klären
  - Visualisierung von wichtigen Begriffen und grundlegenden Lernzielen
  - Demonstration der Grundaufgabe und zeigen der Hilfsmittel
2. **ERKUNDEN (1. Forschungsphase in Einzelarbeit, allenfalls Partnerarbeit)**
  - Grundaufgabe bearbeiten (sich in die Thematik und Aufgabe eindenken)
  - mathematische Kernideen und Strukturen erahnen, erkunden, erkennen
  - Hypothesen bilden, Fragen festhalten, weitere Teilaufgaben erkunden
3. **AUSTAUSCHEN (1. Evaluationsphase in Partner-/Gruppenarbeit oder Plenum)**
  - Erkenntnisse zur Grundaufgabe sammeln, Verständnis sichern
  - Nacherklärungen zu Begriffen und Lernzielen
  - Eröffnen der Teilaufgaben (mit eventuellen kurzen Hinweisen)
4. **UNTERSUCHEN (2. Forschungsphase in Partner-/Gruppenarbeit)**
  - Teilaufgaben gemeinsam bearbeiten und evtl. Hypothesen untersuchen
  - Lösungen und Beschreibungen zu Entdeckungen / Erkenntnissen festhalten
  - Teilaufgaben weiterentwickeln und weitere Aufgaben erfinden
5. **AUSWERTEN (2. Evaluationsphase in Gruppenarbeit oder Plenum)**
  - Erkenntnisberichte oder kurze Lernberichte verfassen, Plakate herstellen...
  - Erkenntnissen präsentieren (Ausstellung, Vernissage von Dokumenten aus der Forschungsarbeit, Plakate, Kurzpräsentationen, Mathekonferenz...)
  - Rückmeldungen der Lehrperson zur Inszenierung der Lernumgebung und zum Verlauf der Forschungsarbeiten
  - Persönliche Lernberichte festhalten in Einzelarbeit (z.B. zu Fragen wie „Was habe ich gelernt? Wie hat mir die Aufgabe gefallen?...“)
  - Evtl. Selbsteinschätzung vornehmen zu erreichten Lernzielen, kompetenzorientierten Beobachtungskriterien auf Beurteilungsraster zur formativen Beurteilung
  - Planung zum weiteren Vorgehen (evtl. Fortsetzung der Lernumgebung, gemeinsames Erforschen von Teilaufgaben – Hausaufgabenmöglichkeit; ACHTUNG: keine Schnellerklärungen für die Klasse zu anspruchsvolleren Teilaufgaben vornehmen, da dies kaum verständnisorientiert gelingen kann und deshalb nicht nachhaltig ist! Dann lieber die Lernumgebung zu einem späteren Zeitpunkt im Sinne des Spiralprinzips wieder aufnehmen!)